Образцы решения некоторых задач с параметрами

Уменьшенным шрифтом я буду комментировать собственное решение. Эти участки поясняют некоторые выборы и действия и в решение не входят

1. *Для каждого значения параметра a укажите решение уравнения*

$$|x^2 + 6x + 5| = ax + 2.$$

При каких значениях параметра a уравнение имеет не более трех решений?

Решение.

Какой способ применить? Можно было бы решать и аналитически. То есть, обращаться с уравнением так, как если бы значчение a было нам известно, иногда варьируя выкладку в разных случаях для a. Само уравнение не громоздкое (бывает значительно хуже). Но раскрытие модуля заставит нас делать отбор корней. Вот именно отбор корней удобнее сделать графически. При этом выбираем график в осях xOy – он легко строится)

Построим графики левой и правой части. График левой части получается из обычного изображения параболы $y = x^2 + 6x + 5$ симметричным отражением относительно оси Ox той части графика, которая находится под осью Ox и дает отрицательный y (см. рисунки 1 и 2).

Теперь графики правой части. Графики, потому что их много: для каждого a свой график. Сначала найдем их общее свойство. Во-первых, при любом действительном a график $y = ax+2$ представляет собой прямую линию. Во-вторых, если подставить $x = 0$, то получим $y = a \cdot 0 + 2 = 2$ для любого a. Это значит, что все такие прямые проходят через точку $P(0;\, 2)$.

Говорят, что у нас есть *пучок прямых*, проходящих через точку $P(0;\, 2)$.

Прямые отличаются друг от друга углом наклона к оси Ox, угловой коэффициент здесь как раз и равен a. На рисунке 3 изображены некоторые прямые пучка.

Решить графически уравнение – значит найти точки пересечения (точнее, абсциссы точек пересечения) графиков левой и правой части. Алгебраически этому соответствует решение системы

$$\begin{cases} y = |x^2 + 6x + 5|, \\ y = ax + 2. \end{cases}$$

Мы сейчас нарисуем графики левой и правой части на одной картинке (Рис. 4) и прочитаем по графику ответ.

Подчеркну, что мы именно находим ответ в задаче. Что ответ именно такой, для полной надежности нужно доказывать. А картинка – это картинка. Она ничего не доказывает. Но знать правильный ответ, несомненно, помогает при строгом решении.

Общий план нахождения ответа по графику на плоскости xOy такой: мы двигаемся от меньших значений параметра к большим и наблюдаем: 1) сколько решений; 2) как их выразить через параметр. Особое внимание мы уделяем ***характерным точкам*** – тем точкам на графике (и, соответственно, значениям параметров), при прохождении которых меняется структура решения. То есть, либо число решений меняется, либо формула для нахождения решения. Приступим к чтению по графику.

1) При больших по величине отрицательных a прямая нашего пучка имеет вид k на рис. 4. Она пересекает обе ветки параболы $y = x^2 + 6x + 5$ по одному разу, а с «перевернутым» участком $y = -x^2 - 6x - 5$ не пересекается. Отсюда и корни – они являются просто корнями уравнения $x^2 + 6x + 5 = ax + 2$. Это уравнение имеет вид $x^2 + (6 - a)x + 3 = 0$, дискриминант $D = (6 - a)^2 - 12 = a^2 - 12a + 24$. Отсюда пара корней: $x = \dfrac{a - 6 \pm \sqrt{a^2 - 12a + 24}}{2}$.

Эта пара корней существует, пока, поворячиваясь против часовой стрелки вокруг точки $P(0; 2)$, прямая не встретит *характерную точку* C – где прямая коснется параболы $y = -x^2 - 6x - 5$ (прямая ℓ). Если прямая $y = ax + 2$ касается параболы $y = -x^2 - 6x - 5$, то уравнение $-x^2 - 6x - 5 = ax + 2$ имеет одно решение, то есть дискриминант равен 0:

$$-x^2 - 6x - 5 = ax + 2 \Leftrightarrow x^2 + (6 + a)x + 7 = 0, \quad D = (6 + a)^2 - 28 = a^2 + 12a + 8.$$

$$D = 0 \Leftrightarrow a^2 + 12a + 8 = 0, \quad a = -6 \pm 2\sqrt{7}.$$

Но какое из этих двух значений соответствет точке C если бы на графике у нас был не кусок параболы $y = -x^2 - 6x - 5$, а она вся, еще один случай касания был бы далеко внизу на правой ветке параболы. В этом случае угловой коэффициент касательной $y = ax + 2$ был бы большой отрицательный. Поэтому для нужного нам касания в точке C мы выбираем тот из двух $a = -6 \pm 2\sqrt{7}$, который больше, то есть $a = -6 + 2\sqrt{7}$.

Здесь мы как раз сделали отбор корней с помощью графика.

Итак, при $a \in (-\infty,\ -6+2\sqrt{7})$ уравнение имеет два корня $x = \dfrac{a - 6 \pm \sqrt{a^2 - 12a + 24}}{2}$.

2) При $a = -6 + 2\sqrt{7}$ все ясно: корня три. К корням из первого случая добавляется абсцисса точки касания C: корень уравнения $x^2 + (6 + a)x + 7 = 0$ при $a = -6 + 2\sqrt{7}$. Это просто $x = \dfrac{-(6 + a)}{2} = \dfrac{-(6 - 6 + 2\sqrt{7})}{2} = -\sqrt{7}$.

Итак, при $a = -6+2\sqrt{7}$ уравнение имеет три корня: $x = \dfrac{a - 6 \pm \sqrt{a^2 - 12a + 24}}{2}$ и $x = -\sqrt{7}$.

3) Продолжим вращение прямой $y = ax + 2$ против часовой стрелки вокруг точки $P(0; 2)$. Пока прямая «не добралась» до точки B, она имеет вид вроде m. Мы видим, что прямая дважды пересекает обе параболы: $y = x^2 + 6x + 5$

и «перевернутую» $y = -x^2 - 6x - 5$. Абсциссы точек пересечения с параболой $y = x^2 + 6x + 5$ мы уже находили в п. 1), найдем персечения с «перевернутой» параболой.

$$-x^2 - 6x - 5 = ax + 2 \Leftrightarrow x^2 + (6+a)x + 7 = 0, \quad D = (6+a)^2 - 28 = a^2 + 12a + 8.$$
$$x = \frac{-6 - a \pm \sqrt{a^2 + 12a + 8}}{2}.$$

Эти четыре пересечения прямой $y = ax+2$ с обеими параболами будут существовать, пока на прямую не попадет характерная точка $B(-5;\,0)$ (это прямая n). Подставим координаты точки B в уравнение прямой.

$$0 = a \cdot (-5) + 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{5}.$$

Итак, при $a \in \left(-6 + 2\sqrt{7},\, \frac{2}{5}\right)$ будет четыре корня: $x = \dfrac{a - 6 \pm \sqrt{a^2 - 12a + 24}}{2}$ и $x = \dfrac{-6 - a \pm \sqrt{a^2 + 12a + 8}}{2}$.

4) При $a = \dfrac{2}{5}$ имеем три корня: два пересечения с параболой $y = x^2 + 6x + 5$ и $x = -5$.

Итак, при $a = \dfrac{2}{5}$ уравнение имеет три корня: $x = \dfrac{a - 6 \pm \sqrt{a^2 - 12a + 24}}{2}$ и $x = -5$.

5) При дальнейшем вращении против часовой стрелки вокруг точки $P(0;\,2)$ прямая $y = ax+2$ имеет вид p. видно, что корня будет два, пока прямая не займет положение q и не пройдет через точку $A(-1;\,0)$ – еще одну *характерную точку* (это случится при $0 = a \cdot (-1) + 2$, т.е. при $a = 2$).

Что касается двух корней, то визуально очевидно, что это бо́льшие корни каждого из уравнений $x^2 + 6x + 5 = ax + 2$ и $-x^2 - 6x - 5 = ax + 2$.

Мы снова отобрали корни по графику.

Итак, при $a \in \left(\frac{2}{5},\, 2\right)$ уравнение имеет два корня: $x = \dfrac{a - 6 + \sqrt{a^2 - 12a + 24}}{2}$ и $x = \dfrac{-a - 6 + \sqrt{a^2 + 12a + 8}}{2}$.

5) При $a = 2$ корень один: $x = -1$.

6) При дальнейшем вращении прямой $y = ax + 2$ прямая будет вида r. Мы видим, что прямая не пересекается с графиком $y = |x^2 + 6x + 5|$, соответственно корней нет. Так будет, пока прямая не пройдет через характерную точку D, заняв

положение s. В этом положении прямая касается правой ветки параболы $y = x^2+6x+5$. Если бы парабола $y = x^2+6x+5$ участвовала в графике целиком, то второе касание было бы «внизу» на правой ветке параболы, а там касание будет с меньшим угловым коэффициентом, чем в точке D. Таким образом, из двух корней дискриминанта $a^2-12a+24$ выбираем в слуае касания в точке D бо́льший корень, то есть $a = 6+2\sqrt{3}$.

Итак, при $a \in (2,\, 6+2\sqrt{3})$ корней у уравнения нет.

7) При $a = 6+2\sqrt{3}$ корень один. Это бо́льшая абсцисса точки касания $y = ax+2$ и $y = x^2+6x+5$. То есть, нужно взять $x = \dfrac{a-6+\sqrt{a^2-12a+24}}{2}$ при $a = 6+2\sqrt{3}$. Поскольку дискриминант при таком a равен 0, получится $x = \dfrac{a-6}{2} = \sqrt{3}$.

Итак, при $a = 6+2\sqrt{3}$ уравнение имеет один корень $x = \sqrt{3}$.

8) Пусть, наконец, $a \in (6+2\sqrt{3},\, +\infty)$. При таких угловых коэффициентах прямая занимает положение вида t и дважды пересекает правую ветку параболы $y = x^2+6x+5$. На рисунке второго пересечения не видно, но оно есть. Это можно обосновать тем, что при рассматриваемых a дискриминант не равен 0 (и не меньше нуля, поскольку одно-то персечение точно видно). Значит, дискриминант больше 0 и корня два.

Здесь мы сталкиваемя с одним из недостатков графического метода. Бывает, что на рисунке умещается не все. А бывает и рисунок сильно искаженный.

Итак, при $a \in (6+2\sqrt{3},\, +\infty)$ уравнение имеет два корня: $x = \dfrac{a-6\pm\sqrt{a^2-12a+24}}{2}$.

Чтение по графику мы закончили. Пробежавшись по пунктам 1)–8), там где после слова «Итак», мы может собрать ответ (я не буду здесь собирать).

Был еще вопрос, когда уравнение имеет не более трех корней. теперь очевидно, что это будет при $a \in (-\infty,\, -6+2\sqrt{7}] \cup \left[\dfrac{2}{5},\, +\infty\right)$.

Если бы мы хотели только ответить на последний вопрос, то можно было бы сделать меньше работы. А мы проделали много работы – нашли ответ в уравнении *при каждом a*. Разумеется, этой работы оказалось достаточно для ответа на вопрос о не более трех корнях.

На следующей странице расположены картинки

Рис.1

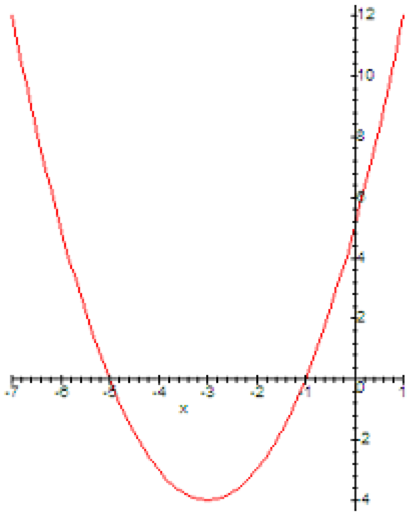


Рис.2

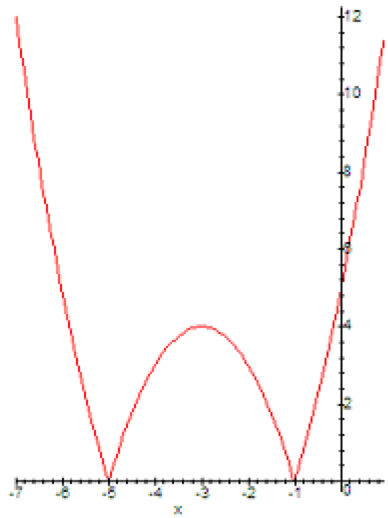


Рис.3.

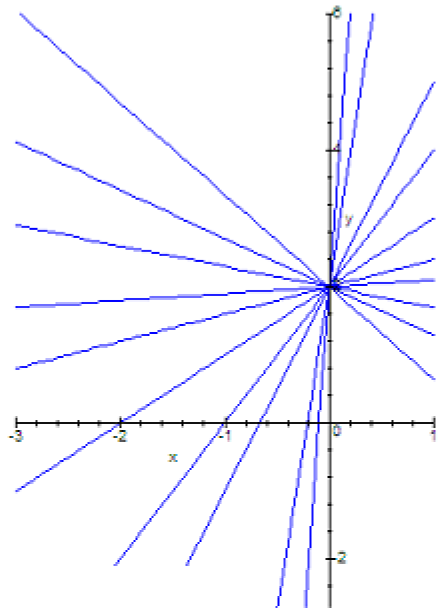
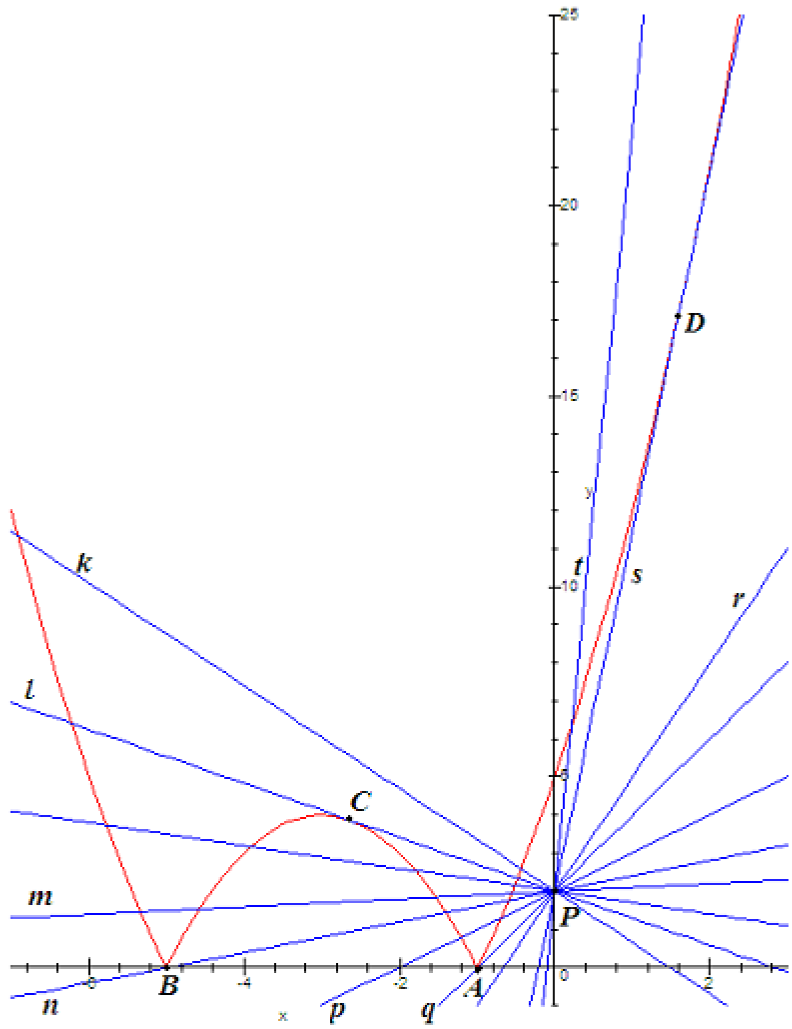


Рис.4.



2. *При каждом значении параметра a решите уравнение*

$$4x^2 - 4x - 12|2x - 1 - a| - 3 = 0.$$

При каких значениях параметра уравнение имеет нечетное число решений?

Решение. В большинстве случаев мы имеем возможность упростить вид уравнения перед тем, как его решать.

В этом с нами согласны и составители вариантов ЕГЭ.

Замечая фразы «$4x^2 - 4x$» и «$2x - 1$», мы можем попробовать зделать замену переменной $t = 2x - 1$. Тогда $4x^2 - 4x + 1 = t^2$ и уравнение примет вид

$$t^2 - 1 - 12|t - a| - 3 = 0 \quad \text{или} \quad t^2 - 12|t - a| - 4 = 0.$$

После того, как мы найдем t, мы легко найдем и $x = \dfrac{t+1}{2}$.

Ответ для этого уравнения легко получить графически как в осях tOy, так и в осях tOa. Поскольку первый пример был решен в xOy, здесь для разнообразия выберем tOa.

Для начала, раскроем знак модуля:

$$t^2 - 12|t-a| - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t - a \geqslant 0, \\ t^2 - 12(t-a) - 4 = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} t - a < 0, \\ t^2 - 12(-t+a) - 4 = 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t - a \geqslant 0 \quad (I), \\ a = -\dfrac{1}{12}t^2 + t + \dfrac{1}{3}. \end{cases} \\ \begin{cases} t - a < 0 \quad (II), \\ a = \dfrac{1}{12}t^2 + t - \dfrac{1}{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Сейчас мы построим график нашего уравнения, чтобы потом по нему прочитать ответ. График мы будем строить по областям: области (I), где $t - a \geqslant 0$, и области (II), где $t - a < 0$.

В области (I) график уравнения выглядит как парабола $a = -\dfrac{1}{12}t^2 + t + \dfrac{1}{3}$, но не вся, а те ее участки, которые попадают в эту самую область $t - a \geqslant 0$. То есть, это участки параболы, для которых $t - a = t - \left(-\dfrac{1}{12}t^2 + t + \dfrac{1}{3}\right) \geqslant 0$. Решая это неравенство, получим

$$\frac{1}{12}t^2 - \frac{1}{3} \geqslant 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty,\, -2] \cup [2,\, +\infty).$$

Участок параболы $a = -\dfrac{1}{12}t^2 + t + \dfrac{1}{3}$ на интервале $t \in (-2,\, 2)$ в график уравнения не войдет. Часть графика уравнения в первой области изображена на рисунке 5.

Аналогично можно найти, что во второй области на графике будет лишь часть параболы $a = \dfrac{1}{12}t^2 + t - \dfrac{1}{3}$, удовлетворяющая условию $t - a = t - \left(\dfrac{1}{12}t^2 + t - \dfrac{1}{3}\right) < 0$. мы вновь получаем лишь участки параболы при $(-\infty,\ -2) \cup (2,\ +\infty)$. Участок графика в области (II) изображен на рисунке 6.

Если мы объединим эти два участка графика, то получим полный график уравнения. Он изображен на рисунке 7.

Отметим на графике уравнения характерные точки.

Во-первых, это вершина A первой параболы. Найдем ее координаты: $t_v = \dfrac{-1}{2 \cdot (-1/12)} = 6$, тогда $a_v = -\dfrac{1}{12} \cdot 6^2 + 6 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{10}{3}$. Итак, $A(6;\ \frac{10}{3})$.

Аналогично можно найти вершину B второй параболы: $t_v = \dfrac{-1}{2 \cdot 1/12} = -6$ и $a_v = \dfrac{1}{12} \cdot (-6)^2 - 6 - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{10}{3}$. Значит, $B(-6;\ -\frac{10}{3})$.

Кроме того, это точки, где параболы выходят на границы своих областей (I) и (II). Мы выяснили выше, что это будт при $t = -2$ и $t = 2$. Та и другая параболы при $t = -2$ дает $a = \dfrac{1}{12}(-2)^2 + (-2) - \dfrac{1}{3} = -2$, и получается точка $C(-2;\ -2)$. При $t = 2$ мы получим $a = 2$ и точку $D(2;\ 2)$.

Начнем читать ответ по графику. Мы знаем, что на плоскости tOa все точки (в том числе и решения уравнения), соответсвующие данному значению параметра a_0, лежат на горизонтальной прямой $a = a_0$. Значит, чтобы получить решения уравнения при данном $a = a_0$, нужно найти абсциссы точек пересечения графика уравнения и прямой $a = a_0$.

1) При $a \in (-\infty,\ -\frac{10}{3})$ (пока прямая не дошла снизу до точки) мы имеем два решения. Это два пересечения с параболой в области (I), как это видно по графику. Дискриминант первого уравнения $D = 160 - 48a$, а корни $t = \dfrac{12 \pm 4\sqrt{10 - 3a}}{2} = 6 \pm 2\sqrt{10 - 3a}$. .

Итак, при $a \in (-\infty,\ -\frac{10}{3})$ уравнение имеет два корня: $6 \pm 2\sqrt{10 - 3a}$.

2) При $a = -\frac{10}{3}$ к двум корням из 1) добавляется абсцисса вершины второй параболы. Этот случай соответствует прохождению горизонтальной прямой через точку B.

В точке B будет $t = -6$.

Итак, при $a = -\frac{10}{3}$ уравнение имеет три корня: $6 \pm 2\sqrt{10 - 3a}$ и -6.

3) Пусть $a \in (-\frac{10}{3},\ -2)$. Пока прямая проходит между точками B и C в положении вида d, она пересекает обе параболы по два раза. Для второй параболы дискриминант $D = 160 + 48a$, корни $t = \dfrac{-12 \pm 4\sqrt{10 + 3a}}{2} = -6 \pm 2\sqrt{10 + 3a}$.

Итак, при $a \in (-\frac{10}{3}, -2)$ уравнение имеет четыре корня: $6 \pm 2\sqrt{10-3a}$ и $-6 \pm 2\sqrt{10+3a}$.

3) При $a = -2$ горизонтальная прямая в положении e, корнями являются меньший корень трехчлена из области (II), больший корень трехчлена из области (I) и $t = a = -2$.

Итак, при $a = -2$ уравнение имеет три корня: $-6 - 2\sqrt{10+3a}$, $6 + 2\sqrt{10-3a}$ и $t = -2$.

4) При $a \in (-2, 2)$, то есть когда прямая проходит в положении вида g между точками C и D, остаются меньший корень трехчлена во второй области и больший корень трехчлена в первой области.

Итак, при $a \in (-2, 2)$ уравнение имеет два корня: $-6 - 2\sqrt{10+3a}$ и $6 + 2\sqrt{10-3a}$.

5) При $a = 2$ ситуация аналогична 3).

Итак, при $a = 2$ уравнение имеет три корня: $-6 - 2\sqrt{10+3a}$, $6 + 2\sqrt{10-3a}$ и $t = 2$.

6) При $a \in (2, \frac{10}{3})$ горизнтальная прямая пересекает обе параболы по два раза.

Итак, при $a \in (2, \frac{10}{3})$ уравнение имеет четыре корня: $6 \pm 2\sqrt{10-3a}$ и $-6 \pm 2\sqrt{10+3a}$.

7) При $a = \frac{10}{3}$ корни $6 + 2\sqrt{10-3a}$ и $6 - 2\sqrt{10-3a}$ совпадут. Этот случай соответствует прохождению горизонтальной прямой через точку A.

В точке A будет $t = 6$.

Итак, при $a = -\frac{10}{3}$ уравнение имеет три корня: $-6 \pm 2\sqrt{10+3a}$ и 6.

8) При $a \in (\frac{10}{3}, +\infty)$ (когда прямая проходит уже выше точки A) мы имеем два решения. Это два пересечения с параболой в области (II), как это видно по графику. Корни второго уравнения будут $t = -6 \pm 2\sqrt{10+3a}$. .

Итак, при $a \in (\frac{10}{3}, +\infty)$ уравнение имеет два корня: $-6 \pm 2\sqrt{10+3a}$.

Теперь при теж же a можно получить соответсвующие x, преобразовав значение t: $x = \dfrac{t+1}{2}$. Например, корни при $a = 2$ будут $(-6 - 2\sqrt{10+3a} + 1)/2 = -\dfrac{5}{2} - \sqrt{10+3a}$, $(6 + 2\sqrt{10-3a} + 1)/2 = \dfrac{7}{2} + \sqrt{10-3a}$ и $(2+1)/2 = \dfrac{3}{2}$.

Для всех случаев a такое преобразование можно сделать без труда.

Рис.6

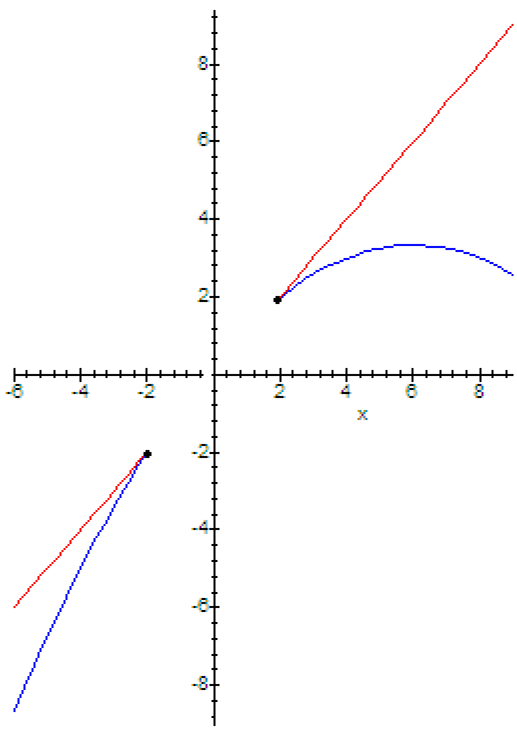


Рис.7

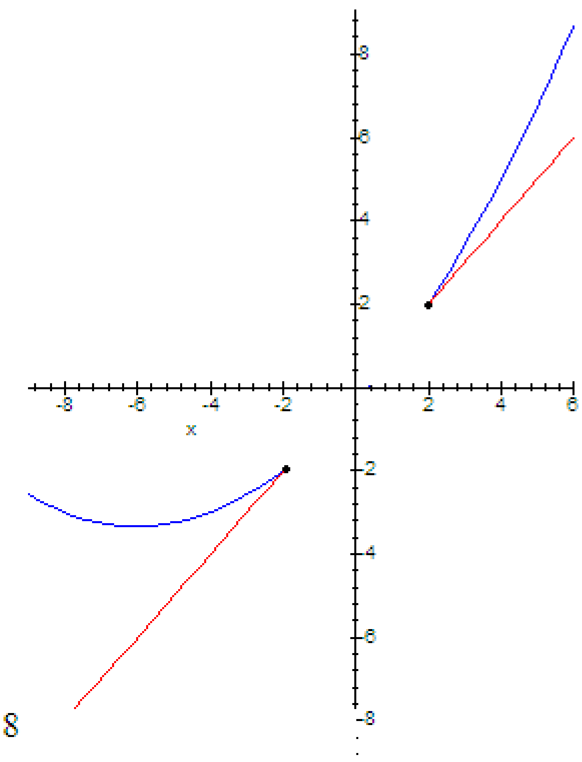


Рис.8